Algèbre 7 - Déterminants

Dans toute la suite du cours, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Déterminant d'une matrice carrée

1.1 "Définition", premières propriétés et calculs

Théorème/définition. *Il existe une unique application* $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1. $\det$ *est* ***n-linéaire****, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable. Autrement dit, si* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $X, Y \in \mathbb{K}^n$, $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}^n$, *alors pour tout* $i \in [\![1; n]\!]$, *si l'on remplace la colonne* i *par* $\lambda X + \mu Y$ *:*

$$\det\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_1 & \cdots & \lambda X + \mu Y & \cdots & C_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_1 & \cdots & X & \cdots & C_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} + \mu \det\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_1 & \cdots & Y & \cdots & C_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

2. $\det$ *est* ***alternée****, c'est-à-dire antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable :*

$$\det\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_1 & \cdots & C_{\boldsymbol{i}} & \cdots & C_{\boldsymbol{j}} & \cdots & C_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_i & \cdots & C_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

3. $\boldsymbol{\det(I_n) = 1}$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *le nombre* $\det(A)$ *est appelé le* ***déterminant de A****.*

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, *alors* $\det(A)$ *est noté* $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

Démonstration. Admise en PCSI (et difficile). □

Propositions. *Soit* $A = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ C_1 & \cdots & C_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- *Pour* $n = 2$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- *Action des opérations élémentaires (sur les colonnes) :*
  - *Une permutation* $C_i \leftrightarrow C_j$ *fait apparaître un* « $-$ » ;
  - *une dilatation* $C_i \leftarrow \lambda C_i$, *pour* $\lambda \neq 0$, *doit être compensée en faisant* $\times \dfrac{1}{\lambda}$;
  - *une transvection* $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ *ne change pas le déterminant.*

Démonstration.

- L'application $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad-bc$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ vérifie les points 1, 2 et 3 du théorème précédent ; donc il s'agit du déterminant.
- $\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \det(\lambda C_1, \dots, \lambda C_n) \\ &= \lambda \times \cdots \times \lambda \cdot \det(C_1, \dots, C_n) \\ &= \lambda^n \det(A) \end{aligned}$
- Calculs, en utilisant les points 1 et 2 du théorème précédent.

□

Exemple : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix}$.

Théorème. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence :*

$$\boldsymbol{A \text{ inversible} \iff \det(A) \neq 0}$$

Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Démonstration. (ou plutôt : idée des démonstrations) Les opérations élémentaires ne changent pas le fait que le déterminant est nul ou non.

- Si A est inversible, alors avec des opérations élémentaires, on peut obtenir I_n (cf. méthode d'inversion d'une matrice par passage de $(A \mid I_n)$ à $(I_n \mid A^{-1})$), qui est de déterminant $1 \neq 0$.
- Si A n'est pas inversible, alors avec des opérations élémentaires, on peut faire apparaître une colonne nulle (car une des colonnes est une CL des autres), et donc $\det(A) = 0$.
- Pour $\det(A^{-1})$, cela vient de la propriété $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$ (voir plus tard).

□

Remarque. *Ce théorème justifie tout le chapitre. Pour nous, le déterminant est avant tout un outil pour savoir si une matrice est inversible ou pas.*

Propositions. *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *Si A est diagonale, triangulaire supérieure, ou triangulaire inférieure, alors* $\det(A)$ *est le produit des coefficients diagonaux :*

$$\begin{vmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & \cdot \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ \cdot & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 \times \cdots \times a_n$$

- $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.
- $\det(A^T) = \det(A)$*, et par conséquent, les opérations élémentaires sur les lignes ont le même effet que sur les colonnes.*

Remarque. ⚠ $\det(A+B) =$ *rien du tout, et certainement pas* $\det(A) + \det(B)$ *!*

Démonstration. (ou plutôt : idée des démonstrations)

- À l'aide de dilatations et de transvections, on se ramène à I_n, qui est de déterminant 1.
- La formule est vraie si A et B sont des matrices d'opérations élémentaires (simple vérification). Or, si A et B sont inversibles, alors on sait qu'on peut les mettre sous la forme de produits de matrices d'opérations élémentaires, et donc la formule reste vraie. Si A ou B n'est pas inversible, la formule devient $0 = 0$, ce qui est vrai.
- Idem que la démonstration précédente.

□

Conséquence : une première technique pour calculer un déterminant consiste à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour obtenir une matrice triangulaire, puis à prendre le produit des coefficients diagonaux.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculons $\det(A)$. On a

$$\begin{aligned} \det(A) &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} && (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} && (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \\ &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} && (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \\ &= -4 \end{aligned}$$

2. Comme $\det(A) \neq 0$, A est inversible.
3. Calculons $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = -\dfrac{1}{4}$.

Cf exo 4

1.2 Technique de développement par rapport à une ligne ou une colonne

On fixe $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$.

Notation. *Pour $i, j \in [\![1; n]\!]$, on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice A privée de sa i-ième ligne et de sa j-ième colonne.*

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$. On a :

$$\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} \qquad \Delta_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 13 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

Théorème.

- *Soit $i \in [\![1; n]\!]$. On a :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

(développement sur la i-ième ligne)

- *Soit $j \in [\![1; n]\!]$. On a :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

(développement sur la j-ième colonne)

Démonstration. Admise en PCSI (et difficile). □

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Développement par rapport à la première ligne :

$$\det(A) = 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(-2+6) = -4$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \boxed{0} \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Développement par rapport à la deuxième ligne :

$$\det(A) = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$$

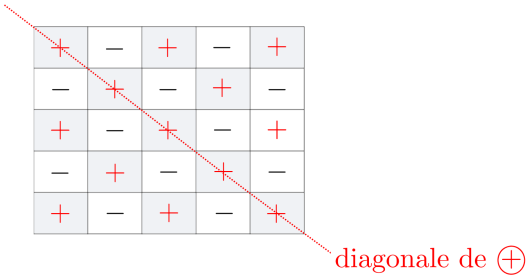
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & \boxed{3} \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Développement par rapport à la première colonne :

$$\det(A) = 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ \boxed{-2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Conseil : pour le $(-1)^{i+j}$, retenir le damier des $(+1)$, (-1) :



Cf exo 5

2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E.

Définition. *Le déterminant d'une famille de n vecteurs $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ selon la base $\mathcal{B}$ est :*

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) := \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ [x_1]_{\mathcal{B}} & \dots & [x_n]_{\mathcal{B}} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

Remarque. *Lorsque $\mathcal{F}$ est elle-même une base, il s'agit du déterminant de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}$.*

Théorème. *On a l'équivalence :*

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$$

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(x_1, \dots, x_n) \text{ est une base} &\iff \operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) = n \\
&\iff \operatorname{rg}\left([x_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [x_n]_{\mathcal{B}}\right) = n \\
&\iff \text{la matrice } \left([x_1]_{\mathcal{B}} \dots [x_n]_{\mathcal{B}}\right) \text{ est inversible} \\
&\iff \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0
\end{aligned}$$

□

Remarque. *Attention à la subtilité :* $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ *dépend de la base* $\mathcal{B}$ *choisie, mais le fait qu'il soit nul ou pas ne dépend pas de* $\mathcal{B}$*.*

Exercice : soit $P_1 = -X^2 + 3X + 1$; $P_2 = 2X$, $P_3 = 5X^2 - 3X - 1$. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

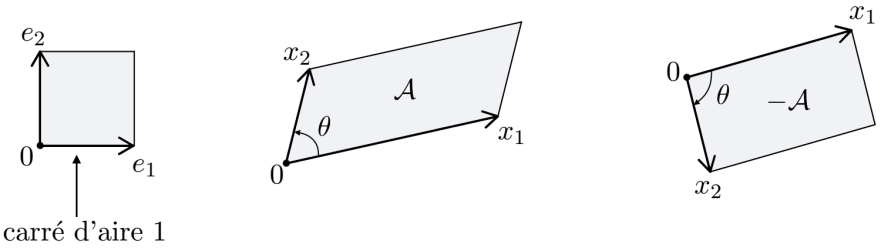
On calcule $\det_{\text{Can}}(P_1, P_2, P_3)$ en développant par rapport à la deuxième colonne :

$$\det_{\text{Can}}(P_1, P_2, P_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

Conclusion : (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Cf exo 7

Interprétations géométriques :

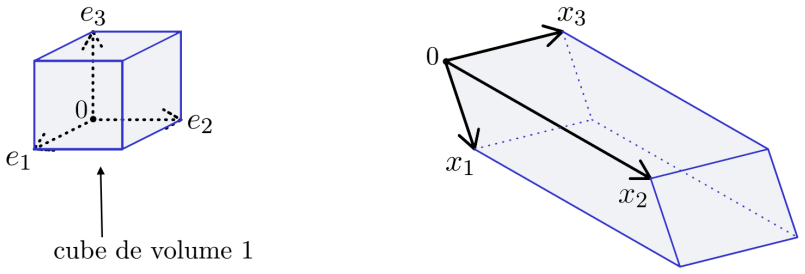
- **Lorsque $E = \mathbb{R}^2$.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique, et $\mathcal{F} = (x_1, x_2)$ une famille de deux vecteurs. On note θ l'angle orienté entre x_1 et x_2.



  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2)$ est l'aire algébrique du parallélogramme engendré par x_1 et x_2, c'est-à-dire :
  - $+$ l'aire si $\theta \in [0; \pi]$;
  - $-$ l'aire si $\theta \in [-\pi; 0]$.

  Si x_1 et x_2 sont colinéaires, alors l'aire est nulle.

- **Lorsque $E = \mathbb{R}^3$.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique, et $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3)$ une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.



  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3)$ est le volume algébrique du parallélépipède engendré par x_1, x_2, x_3 :
  - positif si orienté comme (e_1, e_2, e_3) ;
  - négatif sinon (et nul si coplanaires).

3 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème/définition. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.*

Le nombre $\det\left((\varphi)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\right)$ *ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. On l'appelle le déterminant de l'endomorphisme φ, et on le note* $\det(\varphi)$.

Démonstration. Montrons que $\det\left((\varphi)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\right)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. On note $A = (\varphi)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, et $A' = (\varphi)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}$. Il s'agit de montrer que $\det(A) = \det(A')$.

Or, on a $A' = P^{-1}AP$, où $P := P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. On en déduit :

$$\det(A') = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \times \det(A) \times \det(P) = \frac{1}{\det(P)} \times \det(A) \times \det(P) = \det(A)$$

□

Conséquence : En utilisant l'équivalence (endomorphisme $\leftrightarrow$ matrice carrée) lorsqu'une base a été fixée, on a les propriétés suivantes : pour tout $u, v \in \mathcal{L}(E)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$
2. $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$
3. On a l'équivalence :
$$u \text{ automorphisme} \iff \det(u) \neq 0$$
Dans ce cas, on a $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

Cf exo 8